

# К вопросу о классификации линейных и нелинейных подков Смейла

С. В. Гонченко<sup>1</sup>, А. С. Гонченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> НИИ Прикладной математики и кибернетики  
603005, Россия, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10  
E-mail: gosv100@uic.nnov.ru

<sup>2</sup> Нижегородский государственный университет  
603000, Россия, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: gosv100@uic.nnov.ru

Получено 12 января 2007 г.

Рассматривается задача классификации подков Смейла с точки зрения локальной топологической сопряженности порождающих их двумерных отображений. Показывается, что существует 10 различных типов линейных подков. В случае нелинейных подков, как было установлено в недавней работе [4], различных типов может быть бесконечно много. Однако этот результат относится к новому классу подков, так называемым полуориентируемыми подковами, которые могут существовать у эндоморфизмов (необратимых отображений) диска, а также у диффеоморфизмов, заданных на неориентируемых двумерных многообразиях. В настоящей работе дается также краткий обзор соответствующих результатов из [4].

**Цитата:** С. В. Гонченко, А. С. Гонченко, К вопросу о классификации линейных и нелинейных подков Смейла, *Нелинейная динамика*, 2007, т. 3, №4, с. 423–443.

**Ключевые слова:** подкова Смейла, локальная топологическая сопряженность, гиперболическое множество, стандартное и обобщенное отображения Эно.

S. V. Gonchenko, A. S. Gonchenko

## Towards a classification of linear and nonlinear Smale horseshoes

We consider the problem of classification of Smale horseshoes from point of view of the local topological conjugacy of two-dimensional maps which generate the horseshoes. We show that there are 10 different types of linear horseshoes. As it was established in the recent paper [4], there are infinitely many different types of nonlinear horseshoes. All of them belong to the class of the so-called half-orientable horseshoes and can be realized for endomorphisms (not one-to-one maps) of disk or for diffeomorphisms of non-orientable two-dimensional manifolds. We give also a short review of related results from [4].

**Citation:** S. V. Gonchenko, A. S. Gonchenko, Towards a classification of linear and nonlinear Smale horseshoes, *Rus. J. Nonlin. Dynamics*, 2007, Vol. 3, No. 4, pp. 423–443.

**Keywords:** Smale horseshoe, local topological conjugacy, hyperbolic set, standard and generalized Hénon maps.

MSC 2000: 37Dxx, 37D20

## Введение

В сентябре 1961 г. американский математик С. Смейл, уже известный в то время своими топологическими работами, выступил на международном математическом симпозиуме в Киеве с докладом «Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек» [1].<sup>1</sup> Собственно, в докладе Смейла был приведен пример  $C^\infty$ -дiffeоморфизма двумерной сферы, неблуждающее множество которого состоит из двух неподвижных точек, источника и стока, а также нетривиального гиперболического базисного множества  $\Lambda$ . Последнее получило наименование «подковы Смейла», а сам diffeоморфизм и его аналоги называются diffeоморфизмами подковы Смейла (или просто diffeоморфизмами подковы). В определенном смысле это событие можно рассматривать как начало становления гиперболической теории. К настоящему времени эта важная и во многом основополагающая часть теории динамических систем выглядит вполне завершенной областью знаний, в которой практически не осталось «белых пятен» (о некоторых нерешенных проблемах см., например, в [2, 3]). Однако, как выяснилось совершенно недавно, [4], от гиперболической теории следует ожидать новостей. И что уж совсем выглядит курьезным — эти новости имеют, в частности, отношение именно к тому, с чего гиперболическая теория собственно и начиналась — к подковам. Об этом частично и пойдет речь в настоящей работе.

С общепринятой точки зрения, подковы Смейла считаются простейшими нетривиальными (нульмерными) гиперболическими множествами, о которых «известно всё». Действительно, все они одинаковы с точки зрения  $\Omega$ -сопряженности, т.е. топологической сопряженности на множестве неблуждающих траекторий. Последнее, будем обозначать его как  $\Lambda$ , имеет в любой подкове (в том числе и многомерной) структуру прямого произведения двух канторовских множеств, а ограничение отображения на  $\Lambda$  сопряжено с топологической схемой Бернулли  $B_2$  из двух символов. Однако если рассматривать не только траектории из  $\Lambda$ , но и близкие, т.е. изучать подковы с точки зрения *локальной топологической сопряженности*, то можно немедленно заметить, что подковы бывают разные. Даже линейных подков можно насчитать 10 различных типов, см. рисунки 2, 10 и утверждения 1 и 2. В нелинейном случае различных подков может быть гораздо больше. Однако если рассматривать только diffeоморфизмы плоскости (точнее, diffeоморфизмы диска на себя), то дело ограничивается, по-видимому, только шестью типами подков, вполне аналогичных тем, которые указаны на рис. 2. Если же рассматривать эндоморфизмы (гладкие необратимые отображения), или diffeоморфизмы двумерных неориентируемых многообразий, то, как это было обнаружено в [4], в этом случае существует бесконечное множество различных подков. Правда, все они принадлежат классу т.н. *полуориентируемых подков*.

Заметим, что, в отличие от хорошо известных *ориентируемых* и *неориентируемых* подков Смейла (см. рис. 2), полуориентируемые (примеры линейных полуориентируемых подков показаны на рис. 10, а нелинейных — на рис. 14, 15 и 18), мягко говоря, не так популярны. По существу, их теория начала разрабатываться в работе [4], в которой такие подковы были собственно и обнаружены в обобщенных отображениях Эно. См. § 2, в который мы включили обзор основных результатов из [4].

## 1. Линейные подковы Смейла и их различные типы

Геометрически, действие diffeоморфизма подковы выглядит весьма просто, и мы проиллюстрируем его на примере соответствующего diffeоморфизма  $T$  квадрата  $Q$  с вершина-

<sup>1</sup>См. перевод этой заметки на стр. 445 этого номера

ми  $[a, b, c, d]$ , см. рис. 1. Здесь диффеоморфизм  $T = T_2 T_1$  строится в виде композиции двух отображений  $T_1$  и  $T_2$ . Отображение  $T_1$  превращает квадрат в узкий и длинный прямоугольник, т.е.  $T_1$  сжимает  $Q$  в горизонтальном направлении и растягивает в вертикальном. В простейшем случае  $T_1$  можно считать линейным отображением типа  $\bar{x} = \lambda x + \alpha_1, \bar{y} = \gamma y + \alpha_2$  таким, что  $|\lambda| < 1/2, |\gamma| > 2$ , а вектор  $(\alpha_1, \alpha_2)$  задает некоторый сдвиг. Отображение  $T_2$  уже существенно нелинейное, его действие заключается в том, что прямоугольник  $T_1(Q)$  сгибается в форме подковы и накладывается на квадрат  $Q$  так, чтобы вершина подковы лежала бы вне  $Q$ . У Смейла отображение  $T_2$  — кусочно-линейное: оно нелинейное только в средней части  $T_1(q_0)$  прямоугольника  $T_1(Q)$  (которая отображается в вершину подковы, не пересекаясь с  $Q$ ) и линейное на концах — на прямоугольниках  $T_1(q_1)$  и  $T_1(q_2)$ , см. рис. 1. Такая подкова называется *линейной*. Для линейной подковы условия  $|\lambda| < 1/2$  и  $|\gamma| > 2$  являются, естественно, необходимыми для того, чтобы подкову  $T(Q)$  можно было хорошо расположить на  $Q$ .

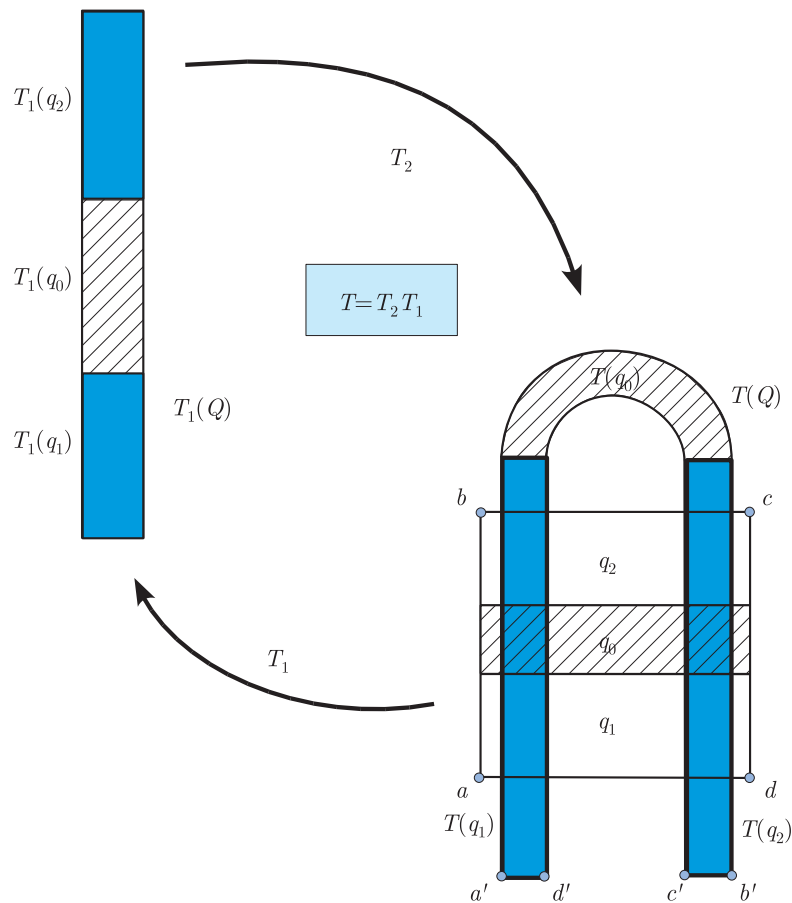


Рис. 1. Геометрическая конструкция линейной подковы Смейла

**Определение 1.** Подковой Смейла называется (локально максимальное на  $Q$  равномерно гиперболическое) множество

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(Q). \quad (1.1)$$

Нужно сказать, что хотя мы формально привязываем это определение к конкретной ситу-

ации — линейной подкове диффеоморфизма  $T$ , формула (1) может рассматриваться как определение подковы вообще. Однако требуется еще выполнение определенных условий. В случае линейной подковы достаточно, чтобы существовала геометрическая картина такая, что

- а)  $T(Q) \cap Q$  состоит из двух компонент связности  $T(q_i) \cap Q$ ,  $i = 1, 2$ ;
- б)  $T(q_0) \cap Q = \emptyset$ ;
- в) отрезки  $[a', d']$  и  $[b', c']$  (образы сторон  $[a, d]$  и  $[b, c]$  относительно  $T$ ) лежат вне  $Q$ .

Однако в общей ситуации на отображение  $T$ , кроме подобных геометрических условий, нужно накладывать также определенные условия «сжатия и растяжения», чтобы обеспечить гиперболичность множества  $\Lambda$ . Это множество  $\Lambda$  у всех подков (линейных и нелинейных) одинаково как в теоретико-множественном смысле —  $\Lambda$  гомеоморфно прямому произведению двух канторовских множеств интервала, так и в динамическом — подковы  $\Omega$ -сопряжены. Последнее означает следующее. Пусть отображения  $T$  и  $T'$  имеют подковы  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  соответственно. Тогда динамические системы  $T|_{\Lambda}$  и  $T'|_{\Lambda'}$  — топологически сопряжены, т.е. существует гомеоморфизм  $h: \Lambda \rightarrow \Lambda'$  такой, что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{T} & \Lambda \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Lambda' & \xrightarrow{T'} & \Lambda' \end{array} \quad (1.2)$$

коммутативна (т.е. гомеоморфизм  $h$  переводит траектории системы  $T|_{\Lambda}$  в траектории системы  $T'|_{\Lambda'}$ ). Более того, для любой подковы соответствующая ей динамическая система  $T|_{\Lambda}$  сопряжена с топологической схемой Бернулли  $\mathcal{B}_2$  из двух символов. Последний факт, вместе с гиперболичностью  $\Lambda$ , можно рассматривать, в принципе, также как определение подковы.

Таким образом,  $\Omega$ -сопряженность не позволяет различать подковы. Однако если рассматривать более сильные отношения эквивалентности, то с их помощью уже можно различать подковы Смейла. Одним из наиболее важных и хорошо известных типов отношений эквивалентности в теории динамических систем является так называемая *локальная топологическая эквивалентность (сопряженность)*.

**Определение 2.** Пусть даны два отображения  $T$  и  $T'$ , которые имеют (замкнутые) инвариантные множества  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  соответственно. Тогда  $T$  и  $T'$  локально топологически сопряжены (на  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ ), если для любых окрестностей  $V(\Lambda)$  и  $V'(\Lambda')$  существуют такие их подокрестности  $U \subset V$  и  $U' \subset V'$ , а также гомеоморфизм  $\tilde{h}: U \rightarrow U'$ , что  $\tilde{h}(\Lambda) = \Lambda'$  и следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U(\Lambda) & \xrightarrow{T} & U(\Lambda) \\ \downarrow \tilde{h} & & \downarrow \tilde{h} \\ U'(\Lambda') & \xrightarrow{T'} & U'(\Lambda') \end{array} \quad (1.3)$$

коммутативна. Таким образом, гомеоморфизм  $\tilde{h}$  переводит не только траектории системы  $T|_{\Lambda}$  в траектории системы  $T'|_{\Lambda'}$ , но также и все близкие траектории (не обязательно целые).

Очевидно, локальная топологическая сопряженность влечет  $\Omega$ -сопряженность, обратное, вообще говоря, не верно — даже в случае простейших гиперболических множеств — подков Смейла. У таких подков даже в линейном случае (хотя линейность здесь в определенном смысле<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Имеется в виду, что линейные и нелинейные подковы с одинаковой геометрией топологически эквивалентны, но линейных подков таких типов, как, например, на рис. 15 и 18 ниже, не бывает.

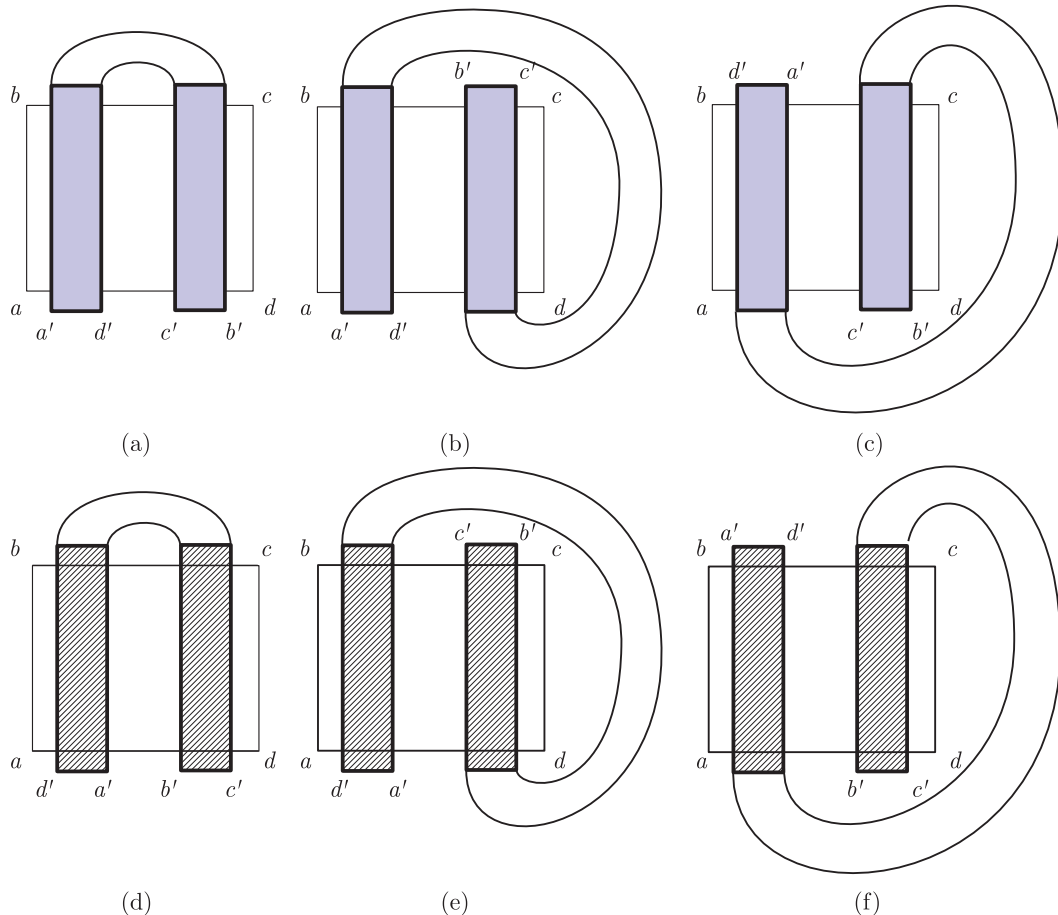


Рис. 2. (a)–(c) — ориентируемые, (d)–(f) — неориентируемые диффеоморфизмы подковы

не важна) существуют свои инварианты локальной топологической сопряженности. Например, множества *границных периодических точек*. Сам этот факт является следствием общей теории [5] инвариантов топологической сопряженности транзитивных гиперболических множеств (а подкова Смейла — именно такое множество).<sup>3</sup>

**Определение 3.** Пусть  $\Lambda$  — инвариантное замкнутое транзитивное гиперболическое множество двумерного отображения. Седловая периодическая точка  $P \in \Lambda$  называется *s-границной*, если отрезок  $W_{loc}^s(P)$  её устойчивого многообразия делит любую достаточно малую окрестность  $V(P)$  точки  $P$  на два открытых диска  $V_1$  и  $V_2$  (т.е.  $V = V_1 \cup V_2 \cup (W_{loc}^s \cap V)$ ) таких, что  $V_1 \cap \Lambda = \emptyset$  и  $V_2 \cap \Lambda \neq \emptyset$ . Аналогично, точку будем называть *u-границной*, если такое разделение имеет место для  $W_{loc}^u$ . Точку, которая является одновременно *s-границной* и *u-границной*, будем называть *(s, u)-границной*.

Мы покажем, что в случае диффеоморфизма двумерного диска на себя существуют подковы, обладающие разными наборами граничных точек, а значит, подковы различных (локально) топологических типов.

<sup>3</sup>Отметим, что задача классификации гиперболических диффеоморфизмов и гиперболических множеств на двумерных многообразиях является одной из наиболее известных в гиперболической теории. При этом основными инвариантами здесь выступают как раз граничные точки [5], см. также [6]. Однако, насколько нам известно, для подков Смейла такая задача не рассматривалась (поскольку, по-видимому, «здесь и так всё ясно»).

В случае когда  $T$  — диффеоморфизм квадрата  $Q$  (линейный, для определенности на  $q_1$  и  $q_2$ , см. рис. 1), нетрудно нарисовать шесть геометрически различных типов линейных подков, см. рис. 2. Подковы, изображенные на рис. 2 (а) и (д) будем называть «обыкновенными», а остальные — «закрученными». Кроме того, подковы рисунков 2 (а)–(с) являются ориентируемыми, а рисунков 2 (д)–(f) — неориентируемыми, в соответствии с типом ориентируемости диффеоморфизма  $T$ .

Отметим, что, как и у любой подковы, у подков рисунка 2 существует по две неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  — будем считать для определенности, что  $O_1 \in q_1, O_2 \in q_2$ . Однако легко видеть, что знаки мультипликаторов точек  $O_1$  и  $O_2$  образуют разные комбинации у подков рисунка 2. А именно, в случае подковы (а) мультипликаторы точки  $O_1$  положительны, а точки  $O_2$  — отрицательны; в случае подковы (д) точка  $O_1$  имеет положительный неустойчивый и отрицательный устойчивый мультипликаторы, а точка  $O_2$ , наоборот, — отрицательный неустойчивый и положительный устойчивый мультипликаторы;<sup>4</sup> обе точки  $O_1$  и  $O_2$  в случае подковы (b) имеют положительные мультипликаторы, в случае подковы (с) — отрицательные мультипликаторы; в случае подковы (е) — положительный неустойчивый и отрицательный устойчивый мультипликаторы, наконец, в случае подковы (f) — положительный устойчивый и отрицательный неустойчивый мультипликаторы. Кроме того, у любой подковы (в том числе и у изображенных на рисунке 2) существует цикл периода два, состоящий из точек  $P_1$  и  $P_2$  таких, что  $T(P_1) = P_2, T(P_2) = P_1$  и  $P_1 \neq P_2$ ; причем такой цикл — единственный.

Следующее утверждение характеризует граничные точки подков рисунка 2.

#### Утверждение 1.

1. В случае ориентируемой подковы рисунка 2(а) множество её граничных точек состоит из одной неподвижной точки  $O_1$ , которая является  $(s, u)$ -граничной.
2. В случае неориентируемой подковы рисунка 2(д) множество её граничных точек составляют неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ ; причем точка  $O_1$  является  $s$ -граничной, а точка  $O_2$  —  $u$ -граничной.
3. В случае ориентируемой подковы рисунка 2(б) множество её граничных точек составляют точки  $O_1$  и  $O_2$ , которые обе являются  $(s, u)$ -граничными.
4. В случае ориентируемой подковы рисунка 2(с) множество её граничных точек составляют точки  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два, которые являются  $(s, u)$ -граничными.
5. В случае неориентируемой подковы рисунка 2(е) множество её граничных точек составляют точки  $O_1$  и  $O_2$ , а также точки  $P_1$  и  $P_2$ ; причем точки  $O_1$  и  $O_2$  являются  $s$ -граничными, а  $P_1$  и  $P_2$  —  $u$ -граничными.
6. В случае неориентируемой подковы Смейла рисунка 2(f) множество её граничных точек составляют точки  $O_1$  и  $O_2$ , а также точки  $P_1$  и  $P_2$ ; причем точки  $O_1$  и  $O_2$  являются  $u$ -граничными, а  $P_1$  и  $P_2$  —  $s$ -граничными.

**Доказательство.** Разобьем квадрат  $Q$  на две половинки, как показано на рис. 3:  $Q_0$  и  $Q_1$  — два вертикальных прямоугольника и  $\tilde{Q}_0$  и  $\tilde{Q}_1$  — два горизонтальных.

<sup>4</sup>Как обычно, устойчивым мы называем тот мультипликатор, который по модулю меньше единицы, а неустойчивым — тот, который по модулю больше единицы

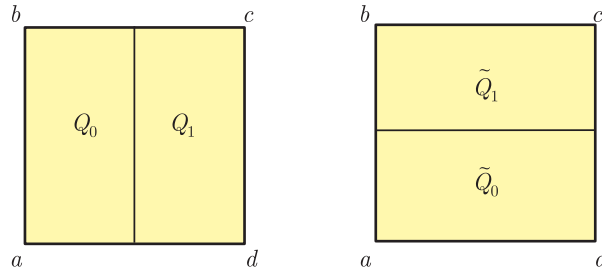


Рис. 3.

1) Рассмотрим случай обыкновенной подковы рисунка 2(а). Здесь образ  $T([a, b])$  стороны  $[a, b]$  пересекает  $Q_0$  и  $Q_1$  по отрезкам, которые являются, в силу геометрии, левой и правой соответственно границами подковы  $T(Q)$ . При этом кривая  $l_0 = T([a, b]) \cap Q_0$  пересекает  $Q_0$  вертикально по всей длине («накрывает»  $[a, b]$  по вертикали). Это означает, что при дальнейших итерациях на  $Q_0$  образы кривой  $l_0$  в пересечении с  $Q_0$  будут накапливаться к той инвариантной кривой на  $Q_0$ , которая остается в  $Q_0$  при все положительных итерациях  $T$ . Такая кривая единственная в любой подкове — это связный кусок  $l_u(O_1)$  множества  $W^u(O_1) \cap Q_0$ , содержащий точку  $O_1$ . В данном случае кривая  $l_u(O_1)$  является левой вертикальной границей множества  $\Lambda$ . Очевидно, правой такой границей является кривая  $T(l_u) \cap Q_1$ . Аналогичные рассуждения показывают, что нижней инвариантной границей множества  $\Lambda$  является кривая  $l_s(O_1)$  — связная компонента множества  $W^s(O_1) \cap \tilde{Q}_0$ , содержащая точку  $O_1$ . Соответственно, верхней такой границей является кривая  $T^{-1}(l_s) \cap \tilde{Q}_1$ .

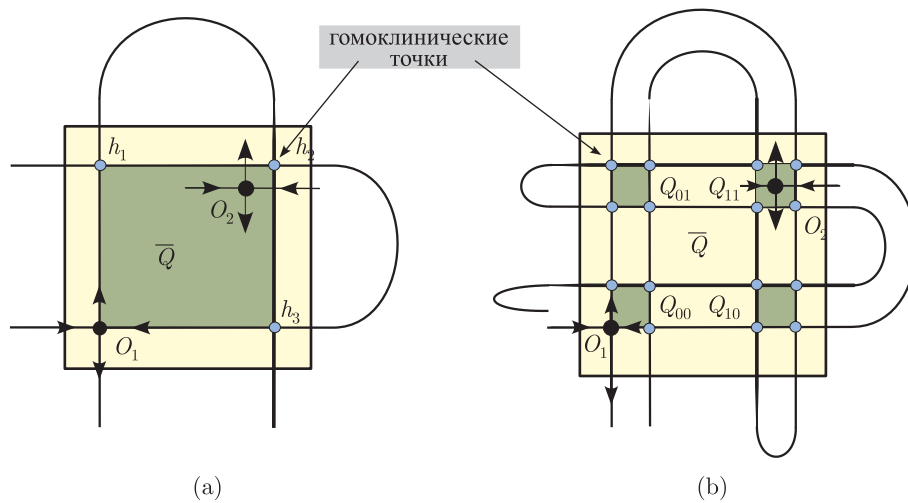


Рис. 4. Начало канторовской процедуры создания ориентируемой подковы в случае (а) рисунка 2. Вначале, рис.(а), куски устойчивого и неустойчивого многообразий точки  $O_1$  ограничивают прямоугольник  $\bar{Q}$  такой, что (i) нет неблуждающих точек вне  $\bar{Q}$ ; (ii) некоторые точки траекторий из  $\Lambda$  принадлежат границе квадрата  $\bar{Q}$  (4 такие точки показаны на рисунке: три из них — это гомоклинические к  $O_1$  точки,  $(h_1, h_2, h_3)$ , и ещё одна — это сама точка  $O_1$ ). Рис.(б) — при соответствующем продолжении кусков кривых на  $W^s(O_1)$  и  $W^u(O_1)$  из рис. (а) образуется 4 новых прямоугольника  $Q_{00}, Q_{01}, Q_{10}$  и  $Q_{11}$  таких, что опять нет точек множества  $\Lambda$  вне их, а на границе квадратов — есть: 16 таких точек показаны на рисунке

Таким образом, в случае подковы рисунка 2 (а) (т.н. ориентируемая обыкновенная подко-



ва) устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки  $O_1$  (имеющей положительные мультипликаторы) формируют границы множества  $\Lambda$ . На рис. 4 показаны первые два шага канторовской процедуры, ведущей к  $\Lambda$ . Сначала образуется прямоугольник  $\bar{Q}$ , у которого сторонами служат соответствующие куски  $(l_s, l_u, T^{-1}(l_s), T(l_u))$  устойчивого и неустойчивого многообразий точки  $O_1$ . Заметим, что вершины квадрата,  $\{O_1, h_1, h_2, h_3\}$ , принадлежат  $\Lambda$ . На втором шаге, рис. 4(b), образуются 4 новых квадрата  $Q_{00}, Q_{01}, Q_{10}, Q_{11}$ , принадлежащих  $\bar{Q}$  и содержащих всё  $\Lambda$ . Кроме того, вершины квадратов  $Q_{ij}$  также принадлежат  $\Lambda$ : это точка  $O_1$  и 15 гомоклинических к ней точек. Заметим, что другая неподвижная точка,  $O_2$ , имеет отрицательные мультипликаторы и расположена строго внутри  $Q_{11}$ . Таким образом, в рассматриваемом случае неподвижная точка  $O_1$  является  $(s, u)$ -граничной.

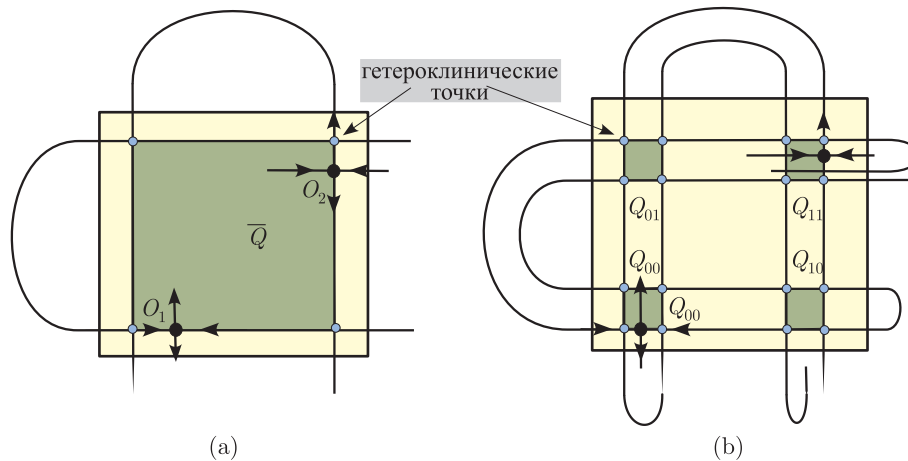


Рис. 5. Начало канторовской процедуры создания неориентируемой подковы Смейла в случае (d) рисунка 2

2) У неориентируемой обыкновенной подковы рисунка 2(d) неподвижная точка  $O_1$  имеет положительный неустойчивый и отрицательный устойчивый мультипликаторы; другая неподвижная точка  $O_2$ , наоборот, имеет положительный устойчивый и отрицательный неустойчивый мультипликаторы. Это говорит о том, что  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  не могут служить границами множества  $\Lambda$ , поскольку отрицательный мультипликатор означает, что точки из  $\Lambda$  будут накапливаться к этим многообразиям с двух сторон. Однако устойчивое многообразие  $W^s(O_1)$  будет формировать, как и прежде, горизонтальную границу множества  $\Lambda$ . Другие границы, вертикальные, образует неустойчивое многообразие точки  $O_2$ . Рассуждение здесь такое же, как и в предыдущем случае — только теперь образ  $T([c, d])$  стороны  $[c, d]$  формирует границы множества  $T(Q)$ , и  $T([c, d])$  накрывает  $[c, d]$  на  $Q_1$ . То есть, при дальнейших итерациях на  $Q_1$  образы  $[c, d]$  в пересечении с  $Q_1$  будут накапливаться к той инвариантной кривой на  $Q_1$ , которая остается в  $Q_1$  при все положительных итерациях  $T$  — связному куску  $l_u(O_2)$  множества  $W^u(O_2) \cap Q_1$ , содержащему точку  $O_2$ . Таким образом, в этом случае граничными (периодическими) точками являются  $O_1$  —  $s$ -граничная — и  $O_2$  —  $u$ -граничная. На рис. 5 показаны первые два шага канторовской процедуры, ведущей к  $\Lambda$ . Сначала образуется прямоугольник  $\bar{Q}$ , у которого сторонами служат соответствующие куски  $W^s(O_1)$  и  $W^u(O_2)$ . Вершинами этого квадрата являются 4 специфические гетероклинические точки. На втором шаге, рис. 5(b), образуются 4 новых квадрата  $Q_{00}, Q_{01}, Q_{10}, Q_{11}$ , принадлежащие  $\bar{Q}$  и содержащие всё  $\Lambda$ . Кроме того, вершины квадратов  $Q_{ij}$  также принадлежат  $\Lambda$ : это 16 гетероклинических точек.

3) У ориентируемой «закрученной» подковы рисунка 2(b) обе неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$



имеют положительные неустойчивый и устойчивый мультипликаторы. Более того, многообразия  $W^u(O_1)$ ,  $W^u(O_2)$ ,  $W^s(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  служат здесь границами множества  $\Lambda$ . Таким образом, в этом случае граничными (периодическими) точками являются  $O_1$  и  $O_2$  — обе эти точки —  $(s, u)$ -граничные. На рис. 6(a) показано начало канторовской процедуры, ведущей к  $\Lambda$ , когда образуется 4 прямоугольника, у которых вертикальными сторонами служат соответствующие куски многообразий  $W^u(O_1)$  и  $W^u(O_2)$ , а горизонтальными — соответствующие куски многообразий  $W^s(O_1)$  и  $W^s(O_2)$ . Вершинами каждого из этих квадратов являются 2 гомоклинические и 2 гетероклинические точки.

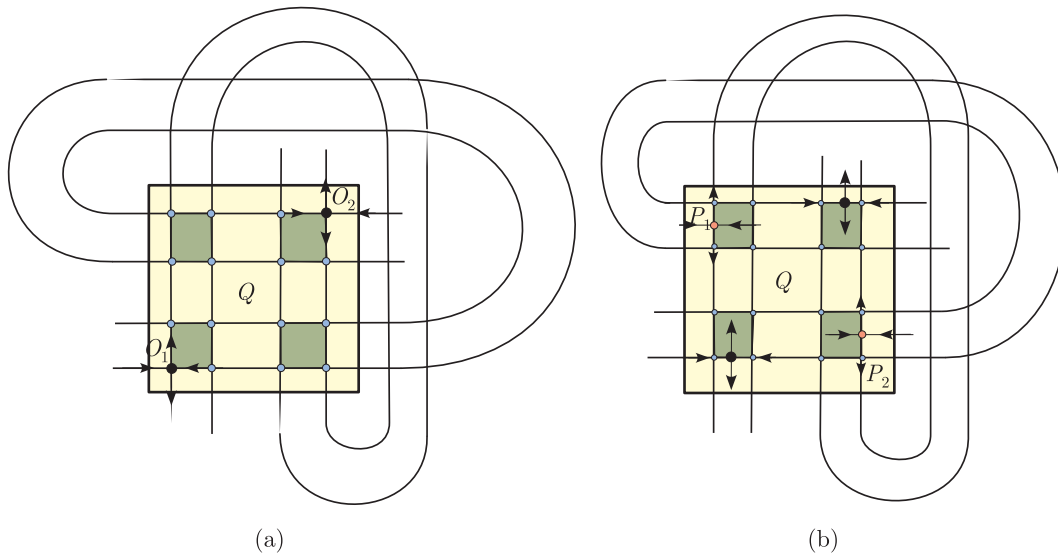


Рис. 6.

4) В случае неориентируемой «закрученной» подковы рисунка 2(е) обе неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  имеют положительный неустойчивый и отрицательный устойчивый мультипликаторы. Поэтому многообразия  $W^s(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  по-прежнему служат здесь (горизонтальными) границами множества  $\Lambda$ . В то же время многообразия  $W^u(O_1)$  и  $W^u(O_2)$  не могут образовывать границу для  $\Lambda$ , в силу отрицательности устойчивых мультипликаторов. Однако нетрудно понять, какая же вертикальная граница будет у  $\Lambda$ . Дело в том, что отображение подковы устроено так, что итерации вперед боковых сторон  $[a, b]$  и  $[c, d]$  сторон квадрата  $Q$  должны сходиться к крайним многообразиям, если, конечно, брать всегда «самые левые» и «самые правые» образы. Обозначим через  $p_1$  и  $p_2$  середины отрезков  $[a, b]$  и  $[c, d]$ , соответственно. Из рисунка 2(е) легко видеть, что образ отрезка  $[p_1, b]$  будет являться самой правой границей множества  $T(Q) \cap Q$ , а образ отрезка  $[p_2, d]$  будет являться самой левой его границей. Более того, только после второй итерации образ отрезка  $[p_1, b]$  накроет себя (по координате  $y$ ); то же самое касается и отрезка  $[p_2, d]$ . Отсюда можно сделать вывод, что граничными неустойчивыми многообразиями множества  $\Lambda$  являются неустойчивые многообразия точек  $P_1$  и  $P_2$  периода 2. На рис. 6(b) показано расположение начальных кусков многообразий  $W^s(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  и  $W^u(P_1)$  и  $W^u(P_2)$ , которые образуют в пересечении 4 криволинейных квадрата, у которых вертикальными сторонами служат соответствующие куски многообразий  $W^u(P_1)$  и  $W^u(P_2)$ , а горизонтальными — соответствующие куски многообразий  $W^s(O_1)$  и  $W^s(O_2)$ . Вершинами каждого из этих квадратов являются специфические гетероклинические точки. Соответственно, граничными точками множества  $\Lambda$  являются в

этом случае неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  ( $s$ -граничные) и точки цикла  $(P_1, P_2)$  ( $u$ -граничные).

5) В случае ориентируемой «закрученной» подковы рисунка 2(с) неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  имеют отрицательные мультипликаторы. Поэтому сами точки  $O_1$  и  $O_2$  не могут быть граничными. Однако из рис. 7(а) нетрудно понять, что здесь  $(s, u)$ -граничными точками служат точки  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два.

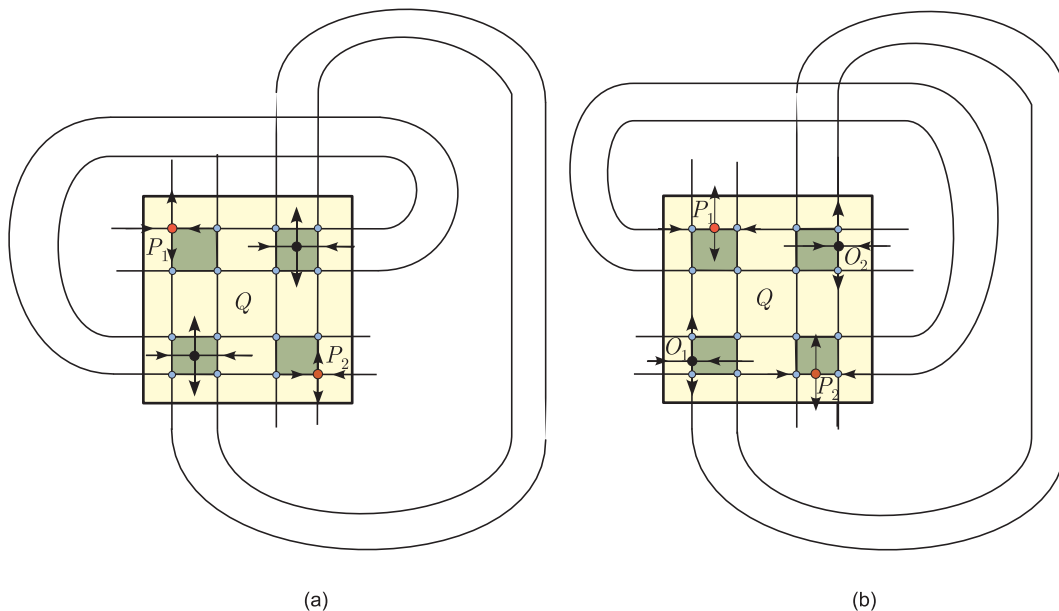


Рис. 7.

6) Случай подковы рисунка 2(f) (обе неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  имеют положительный устойчивый и отрицательный неустойчивый мультипликатор) сводится к рассмотрению подковы рисунка 2(е) для диффеоморфизма  $T^{-1}$ . Поэтому, в соответствии с пунктом 4) доказательства, мы выводим, что здесь  $u$ -граничными являются неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$ , а  $s$ -граничными — точки  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два, см. рис. 7(b). ■

Заметим, что результаты пунктов 3) и 5) были получены также в работах [7, 8, 9], правда, в другой геометрической интерпретации подков как инвариантных подмножеств гиперболических множеств кубических отображений Эно (последние описываются с помощью топологической схемы Бернулли из трех символов), ср. рис. 2 (b) и (с) с рис. 8. В этом же смысле, подковы (е) и (f) рисунка 2 могут быть также реализованы в кубических отображениях Эно с отрицательным якобианом.

Мы видим, что геометрия (и топология) даже линейных подков может быть весьма разнообразной. Кроме того, подковы могут быть представлены также и так как на рис. 9. Однако легко понять, что (локально) топологически они устроены так же, как и обыкновенные подковы рисунков 2 (a) и (d) соответственно. В общем плане топологические типы подков Смейла в случае диффеоморфизмов диска исчерпываются, очевидно, подковами, представленными на рис. 2.

Можно построить новые типы линейных подков в случае отображения диска, если не предполагать, что отображение  $T$  является обязательно диффеоморфизмом. Но по-прежнему, отображения  $T_1$ , а также  $T_2|_{T_1 q_1}$  и  $T_2|_{T_1 q_2}$  нужно брать линейными (см. рис. 1) — обязательное условие для линейной подковы Смейла. Тогда оказываются возможными еще 4 типа так называемых полуориентируемых подков [4] (опять же с точностью до замены  $O_1$  на  $O_2$ ). Все они представ-

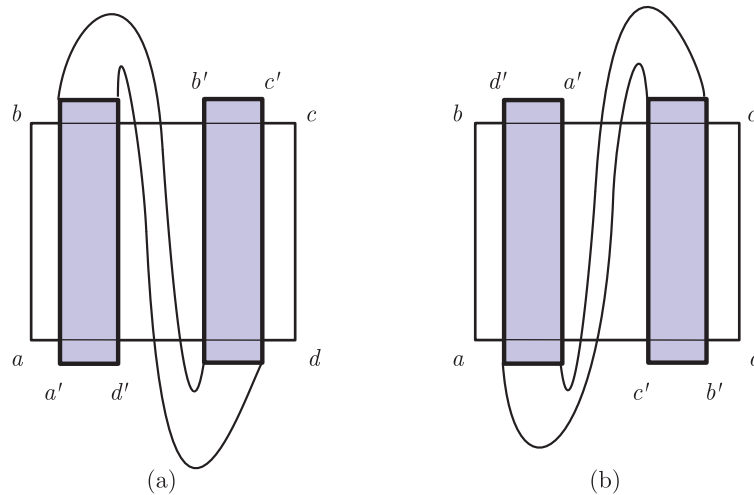


Рис. 8.

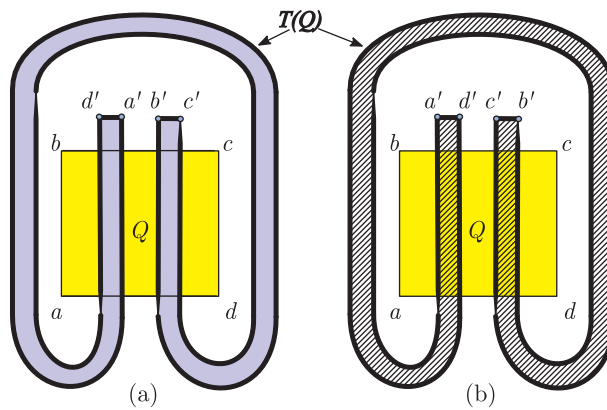


Рис. 9.

лены на рис. 10 и характеризуются тем, что ориентация отображения  $T$  на  $q_1$  и  $q_2$  — разная (отображение  $T$  ориентируемо на  $q_1$  и неориентируемо на  $q_2$  в случаях (g) и (i); и, наоборот,  $T$  неориентируемо на  $q_1$  и ориентируемо на  $q_2$  в случаях (h) и (j)). Для таких подков мы также устанавливаем следующий результат, аналогичный утверждению 1.

### Утверждение 2.

1. В случае полуориентируемой подковы рисунка 10 (g) множество её граничных точек состоит из неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$ , причем  $O_1$  —  $(s, u)$ -граничная, а  $O_2$  —  $u$ -граничная.
2. В случае полуориентируемой подковы рисунка 10 (h) множество её граничных точек состоит из неподвижной точки  $O_1$  и цикла  $(P_1, P_2)$ , причем  $O_1$  —  $s$ -граничная, а точки цикла  $(P_1, P_2)$  —  $u$ -граничные.
3. В случае полуориентируемой подковы рисунка 10 (i) множество её граничных точек состоит из неподвижных точек  $O_1$  и  $O_2$ , причем  $O_1$  —  $(s, u)$ -граничная, а  $O_2$  —  $s$ -граничная.

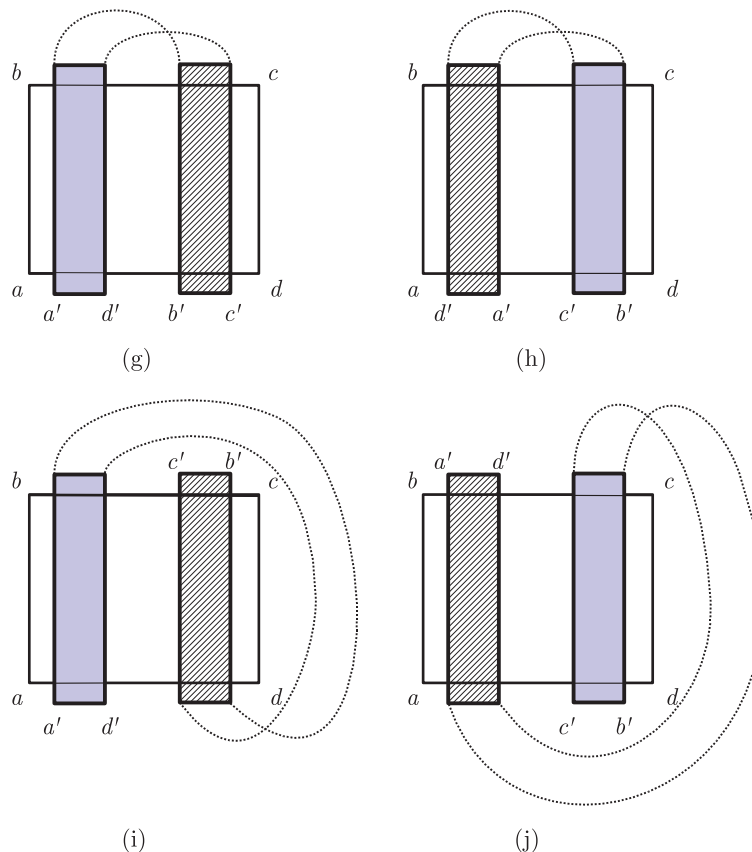


Рис. 10.

4. В случае полуориентируемой подковы рисунка 10 (j) множество ее граничных точек состоит из неподвижной точки  $O_1$  и точек  $P_1$  и  $P_2$  цикла периода два; причем  $O_1$  —  $u$ -граничная точка, а точки  $P_1$  и  $P_2$  —  $s$ -граничные.

Доказательство проводится таким же образом, как и для утверждения 1. Соответствующие картинки расположения устойчивых и неустойчивых многообразий показаны на рис. 11. Заметим, что пункты 1) и 2) утверждения 2 доказаны в [4].

## 2. Подковы в нелинейной динамике, в стандартном и обобщенном отображениях Эно, на неориентируемых многообразиях

Подковы Смейла, как гиперболические подмножества, встречаются в любой системе со сложной динамикой, т.е. допускающей грубые (трансверсальные) гомоклинические траектории Пуанкаре. Этот фундаментальный результат восходит к работам Смейла [10] и Шильникова [11], в которых был проведен анализ множества  $N$  траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической орбиты.<sup>5</sup> Однако, как показано в [11], подкову в этом случае следует рас-

<sup>5</sup>Заметим также, что в [11] соответствующее утверждение было получено без дополнительного технического предположения о гладкой приводимости системы к линейному виду в окрестности седла (в [10] такая приводимость предполагалась), что, естественно, существенно расширяет область применимости результата, захватывая такие важные области теории динамических систем, как консервативные, обратимые, гамильтоновы системы и т.п.

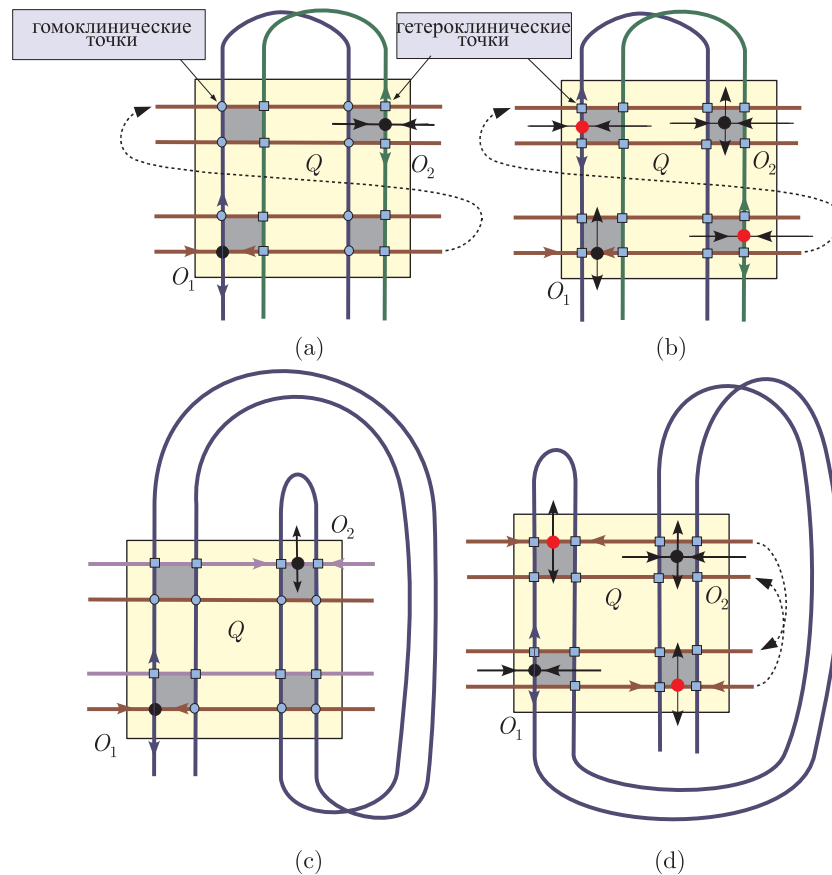


Рис. 11.

сма́тривать лишь как некоторое нетривиальное подмножество из  $N$ . Заметим также, что подковы Смейла, и даже их счетное множество, могут существовать в системах с гомоклиническими петлями к состоянию равновесия типа седло-фокус [12, 13], в системах с гомоклиническими касаниями [14] и др. Многие нелокальные бифуркации приводят к возникновению подков. В частности, таковыми являются некоторые типы бифуркаций, ведущих от систем Морса–Смейла к системам со сложной динамикой, объединенные общим термином «гомоклинический  $\Omega$ -взрыв» — характерным свойством таких бифуркаций является то, что счетное множество подков Смейла возникает сразу — взрывом — после перехода соответствующей бифуркационной границы. См., в частности, по этому поводу обзоры [15, 16] и имеющуюся там литературу.

Если же вернуться к основной теме нашей статьи, то в связи с вышесказанным возникает вопрос о том, в каких системах встречаются подковы описанных в § 1 типов. Более того, существуют ли системы, у которых такие подковы являются в определенном смысле единственным инвариантным множеством (не считая возможного присутствия конечного числа изолированных периодических траекторий или состояний равновесия)?

Что касается «обыкновенных» подков Смейла, таких как на рис. 2 (a) и (b), то их существование и «единственность» хорошо известны для многих динамических моделей «с квадратичными нелинейностями». В частности, такие подковы существуют в отображении Эно [17]. Как мы уже сказали, «закрученные» подковы, такие как на рис. 2 (c)–(f), можно найти у кубических отображений Эно (правда, там они являются только подмножествами более широкого гипербо-

лического множества, кодируемого с помощью трех символов). Весьма интересным (однако и вполне забытым) является тот факт, что подковы этого типа («закрученные») могут существовать в геометрических моделях аттрактора Лоренца (подробнее об этих моделях см. в [18, 19]), в тех областях параметров, где аттрактор уже разрушился и имеет место гиперболичность. Подковы здесь имеют вид (для геометрической модели), показанный на рис. 12, причем ориентация отображения  $T$  на  $D_1$  и  $D_2$  может быть произвольной, поскольку отображение  $T$  в данном случае является разрывным на линии  $s$ . Таким образом, геометрические модели аттрактора Лоренца допускают подковы всех типов, рассмотренных в § 1.<sup>6</sup>

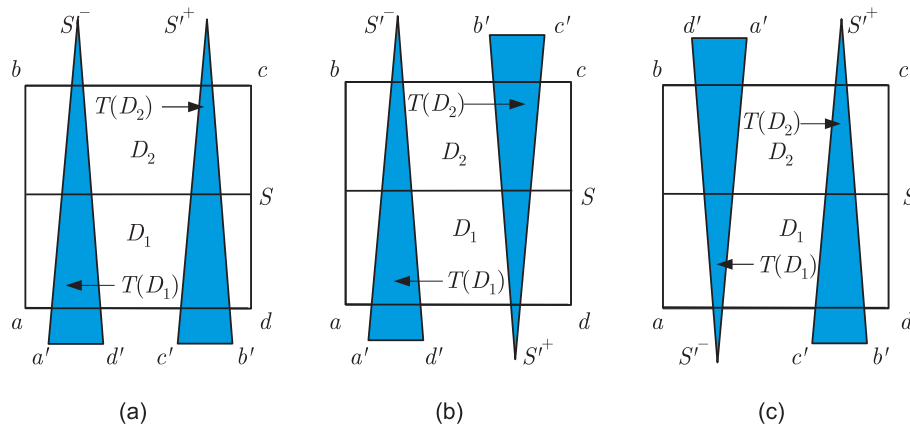


Рис. 12. На рисунке показаны ориентируемые подковы, аналогичные подковам рисунка 2 (a),(b) и (c)

Однако, пожалуй, самой известной моделью, допускающей подковы Смейла, является отображение Эно. Правда, у этого отображения могут существовать подковы только двух типов: обыкновенные ориентируемая и неориентируемая, см. рис. 13 и 2 (a) и (b). Однако, как было показано в недавней работе [4], даже при малых возмущениях отображения Эно могут возникать полуориентируемые подковы как такие же, что и в § 1, так и совершенно новые. Более того, таких подков может быть бесконечно много различных типов (с точки зрения локальной топологической сопряженности). И что является весьма интересным, каждая такая подкова может быть реализована как (полуориентируемая) подкова Смейла диффеоморфизма двумерного неориентируемого многообразия. Обзору этих результатов и будет посвящена оставшаяся часть параграфа.

Классическое отображение Эно имеет вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = 1 - bx - ay^2, \quad (2.1)$$

где  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a$  и  $b$  — параметры (причем  $b$  — якобиан). Это отображение может быть переписано (при  $a \neq 0$ ) в эквивалентной форме

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = M - bx - y^2, \quad (2.2)$$

которую обычно называют стандартной формой отображения Эно, и именно в таком виде отображение Эно возникает в гомоклинической динамике [14, 20, 21].

<sup>6</sup>Однако если говорить о модели Лоренца или других трехмерных потоках, для которых геометрическая модель описывает главные черты отображения Пуанкаре, то, естественно, полуориентируемых подков здесь не может быть. Таким образом, существование последних в геометрических моделях можно считать чисто абстрактным фактом. Конечно, это является, возможно, основной причиной (кроме того, что главное внимание в таких задачах уделяется аттракторам) того, что существование полуориентируемых подков здесь не было отмечено.

Хорошо известно, что при достаточно больших  $M$ , например, в области параметров  $M > 1/4(5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2, b \neq 0$  [17, 7, 8] (достаточное условие), отображение Эно (2.2) имеет гиперболическую динамику, которая в точности описывается подковой Смейла — ориентируемой при  $b > 0$  и неориентируемой при  $b < 0$ , см. рис. 13

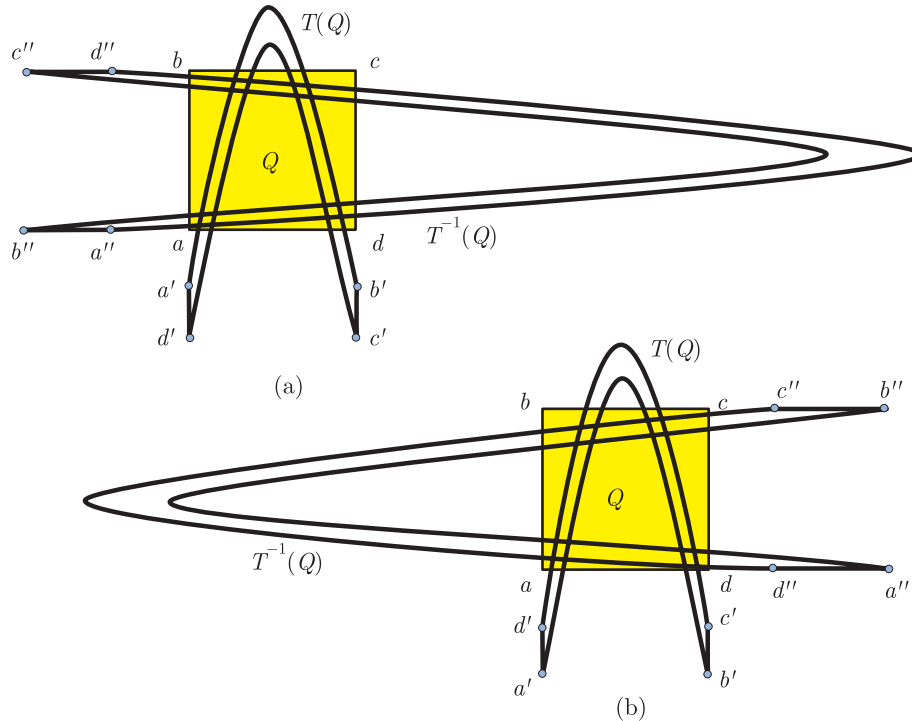


Рис. 13. Геометрия отображения Эно (2.2) в области гиперболичности при достаточно больших  $M$  и малых  $b$  — (а) ориентируемое (при  $b > 0$ ) и (б) неориентируемое (при  $b < 0$ ) отображения подковы

В той области параметров, в которой отображение (2.2) имеет две неподвижные точки, т.е. при  $M > -\frac{(b+1)^2}{4}$ , оно может быть переписано также и в форме «отображения параболы»

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1 - y) - bx, \quad (2.3)$$

где  $\gamma = b + 1 + \sqrt{(b+1)^2 + 4M}$ . Эта форма отображения Эно весьма удобна для исследований, поскольку всё неблуждающее множество отображения (2.3) сосредоточено на квадрате  $Q_\beta = [-\beta, 1 + \beta] \times [-\beta, 1 + \beta]$ , где  $\beta$  не зависит от  $\gamma$  и  $\beta \rightarrow 0$  при  $b \rightarrow 0$  [22]. При  $b = 0$  отображение (2.3) вырождается в, по-существу, одномерное отображение вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1 - y). \quad (2.4)$$

Действительно, любая точка из  $\mathbb{R}^2$  после одной итерации этого отображения ложится на инвариантную кривую  $y = \gamma x(1 - x)$  и далее итерируется по ней в силу отображения параболы  $\bar{y} = \gamma y(1 - y)$ . Хорошо известно, что неблуждающее множество  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  отображения параболы (при всех положительных  $\gamma$ ) содержится целиком в интервале  $[0, 1]$ . При  $\gamma > 4$  множество  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  имеет канторовскую структуру, и ограничение отображения на  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  сопряжено с односторонней схемой Бернулли  $\mathcal{B}_{2+}$  из двух символов. В определенном смысле здесь можно говорить о гиперболичности, но только в классе одномерных отображений. Если отображение (2.4) вложить в



какое-либо семейство двумерных отображений, то структура множества  $\tilde{\Lambda}(\gamma)$  даже при  $\gamma > 4$  может мгновенно разрушиться. В случае семейства (2.3) отображений Эно,  $\Lambda(\gamma)$  превращается в настоящее гиперболическое множество — подкову Смейла — ориентируемую при  $b > 0$  или неориентируемую при  $b < 0$  (см. рис. 13). Однако при другом вложении может получиться что-то совершенно другое.

В статье [4] была исследована динамика (в основном гиперболическая) обобщенного отображения Эно  $\hat{T}$  следующего вида<sup>7</sup>

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = \gamma y(1 - y) - bx + \alpha xy \quad (2.5)$$

при достаточно малых значениях  $b$  и  $\alpha$  и больших  $\gamma$  (во всяком случае, предполагалось, что  $\gamma > 4$ ). В этом случае отображение (2.5) при любом фиксированном  $\gamma > 4$  и достаточно малых  $\alpha$  и  $b$  всегда имеет т.н. геометрическую подкову Смейла. Последнее означает, в частности, что существует такой квадрат  $Q_\beta = [-\beta, 1 + \beta] \times [-\beta, 1 + \beta]$ , где  $\beta = \beta(\alpha, b) \rightarrow +0$  при  $(\alpha, b) \rightarrow 0$ , который под действием отображения  $\hat{T}$  отображается в «подкову»  $\hat{T}(Q_\beta)$ . Такая геометрия порождает существование на  $Q_\beta$  замкнутого инвариантного множества  $\Lambda = \Lambda(\alpha, b)$  — отображение (2.5) не имеет неблуждающих точек вне  $Q_\beta$ . В работе [4] был получен ряд достаточно интересных результатов о структуре множества  $\Lambda$ .

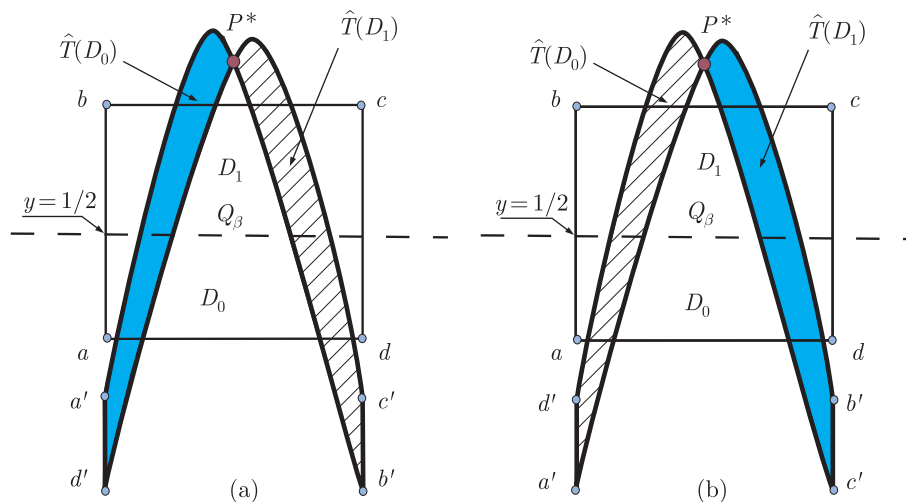


Рис. 14. Два типа полуориентируемых подков в случае отображения (2.5) при  $\alpha = 2b$  и  $\gamma > 4$ . Здесь целая линия  $y = 1/2$  отображается под действием  $\hat{T}$  одну точку  $P^* = (1/2; \gamma/4)$ , а квадрат  $Q_\beta$  отображается в «подкову». Однако подковы различны в случаях (a)  $b > 0$  и (b)  $b < 0$ . При  $b > 0$  отображение  $\hat{T}$  ориентируемое на  $D_0$  и неориентируемое на  $D_1$ ; тогда как при  $b < 0$  оно ориентируемое на  $D_1$  и неориентируемое на  $D_0$

Во-первых, было доказано, что у отображения (2.5) существуют полуориентируемые подковы. В частности, при  $\alpha = 2b$  они имеют вид такой, как на рис. 14 (т.е. вполне аналогичны подковам рисунка 10 (g) и (h)). Как вытекает из утверждения 2 (см. также теорему 2 из [4]), подковы (a) и (b) рисунка 14 имеют разный топологический тип.

<sup>7</sup> Отображение (2.5), как и его аналоги, было введено в [23, 24] как нормальная форма отображения первого вращения вблизи гомоклинического касания. В отличие от стандартного отображения Эно, отображение (2.5) демонстрирует невырожденные бифуркации периодических траекторий с мультипликаторами  $e^{\pm i\varphi}$ , и таким образом помогает исследовать соответствующие бифуркации в многочисленных классах систем с негрубыми гомоклиническими, а также гетероклиническими траекториями.

Во-вторых, было доказано существование полуориентируемых подков совершенно других типов. Дело в том, что, хотя отображение (2.5) (при любом фиксированном  $\gamma > 4$  и достаточно малых  $\alpha$  и  $b$ ) всегда имеет геометрическую подкову, эта подкова необычная — образ  $\hat{T}(Q_\beta)$  квадрата  $Q_\beta$  имеет «точку коллапса»

$$P^* = \left( \frac{b}{\alpha}, \frac{\gamma b}{\alpha} \left( 1 - \frac{b}{\alpha} \right) \right).$$

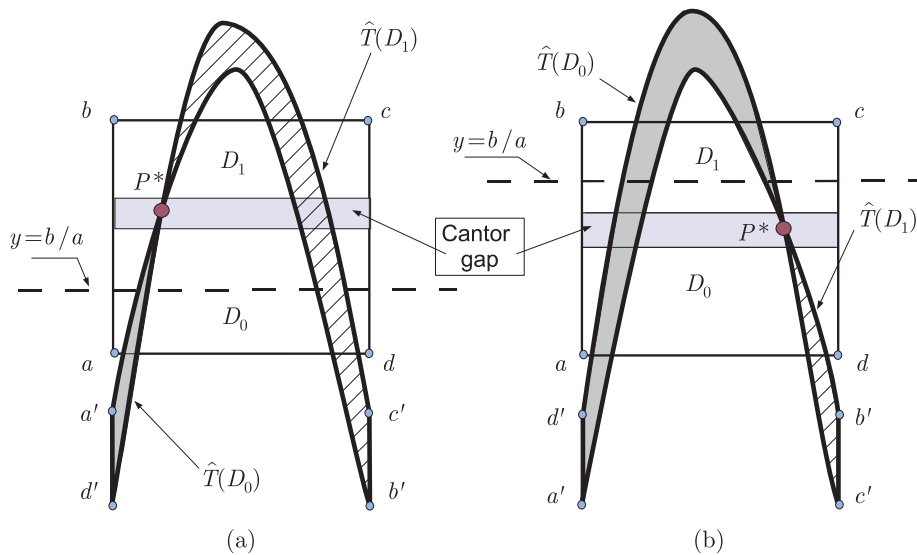


Рис. 15.

В эту точку «схлопывается», под действием  $\hat{T}$ , прямая  $y = b/\alpha$ , на которой якобиан отображения (2.5) обращается в нуль. Когда точка  $P^*$  лежит вне  $Q_\beta$ , мы имеем либо обычные подковы (как на рис. 13, см. также рис. 16 (a) и (e) ниже), либо полуориентируемые подковы, такие как на рис. 14. Однако точка  $P^*$  может лежать и внутри  $Q_\beta$ , тогда подковы могут быть весьма необычными, такими как, например, на рис. 15. Если при этом точка  $P^*$  не принадлежит  $\Lambda$  (т.е. она попадает в промежутки соответствующих канторовских множеств), то  $\Lambda$  является равномерно гиперболическим множеством — подковой Смейла, однако порождающее отображение  $\hat{T}$  будет иметь разную ориентацию при  $y < b/\alpha$  и  $y > b/\alpha$ . Момент  $P^* \in \Lambda$  — бифуркационный: здесь  $\Lambda$  уже не подкова, поскольку бесконечное множество точек из  $\Lambda$ , лежащих на линии  $y = b/\alpha$ , «склеиваются» в одну точку  $P^*$ . Однако все такие бифуркации носят мгновенный характер, и на плоскости параметров  $(\alpha, b)$  те значения, которые отвечают подковам, образуют открытое множество. Следующий результат установлен в [4].

**Теорема 1.** Зафиксируем  $\gamma > 4$ . Тогда в любой достаточно малой окрестности  $V$  начала координат плоскости  $(\alpha, b)$  существует конусообразная область  $\hat{D}$  (примыкающая к точке  $(0, 0)$ )

$$0 < \frac{b}{\alpha} < 1 + \rho(\alpha, b), \quad (2.6)$$

где  $\rho(\alpha, b) \rightarrow 0$  при  $\alpha, b \rightarrow 0$ , такая что

- 1) при  $(\alpha, b) \in V \setminus \hat{D}$  неблуждающее множество  $\Lambda(\hat{T})$  является подковой Смейла — ориентируемой при  $b > 0$  и неориентируемой при  $b < 0$ ;

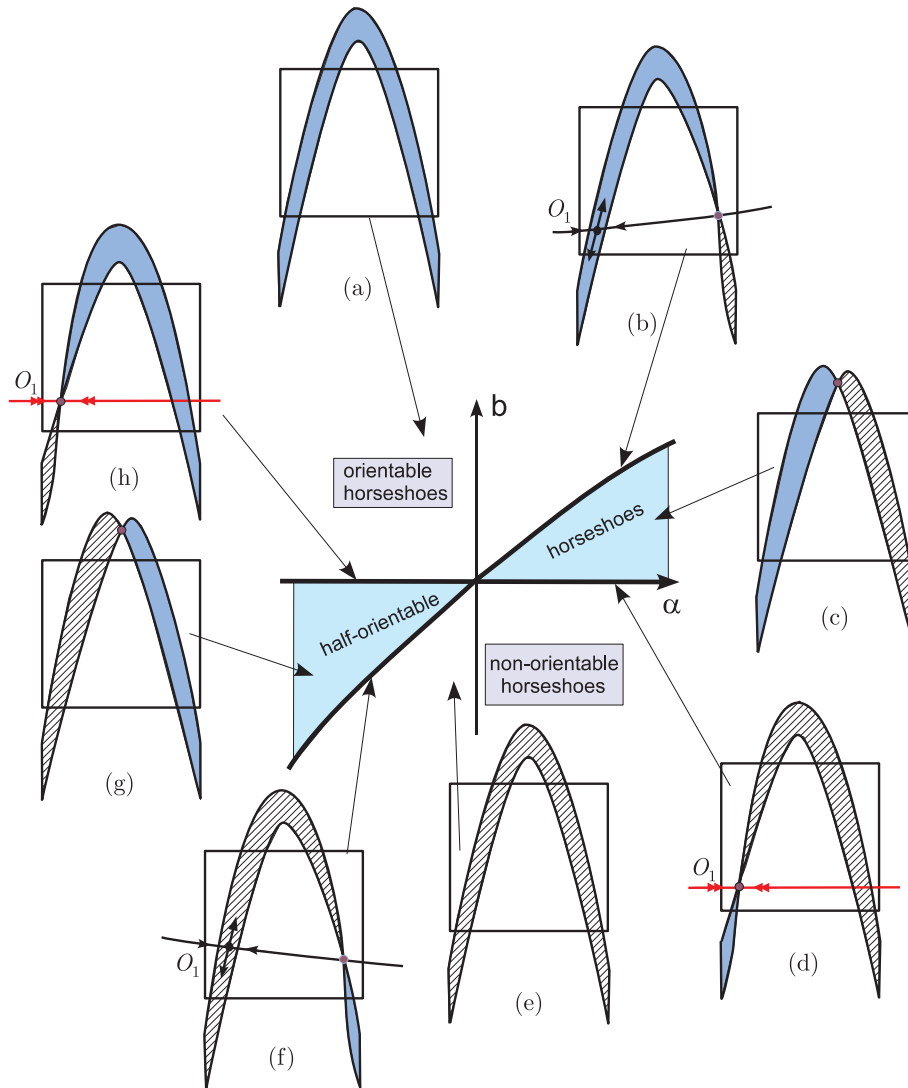


Рис. 16.

- 2) область  $\hat{D}$  содержит бесконечно много открытых конусообразных областей, прилегающих к точке  $(0, 0)$ , при значениях параметров из которых  $\Lambda(\hat{T})$  является полуориентируемой подковой;
- 3) граница  $b = 0$  области  $\hat{D}$  отвечает первой бифуркации, когда точка  $P^*$  совпадает с неподвижной точкой  $O_1$  (при этом у точки  $O_1$  появляется нулевой мультипликатор);
- 4) граница  $b = \alpha(1 + \rho(\alpha, b))$  отвечает последней бифуркации, когда точка  $P^*$  становится (в последний раз) гомоклинической к  $O_1$ .

На рис. 16 приведена иллюстрация к этой теореме, где отмечены также некоторые бифуркационные моменты: в случаях первой бифуркации, при  $b = 0$ , на рис.16 (d) и (h), и последней бифуркации, при  $b/\alpha = 1 + \rho(\alpha, b)$ , на рис.16 (b) и (f).

Многие из бифуркаций, происходящих в области  $\hat{D}$ , могут приводить к весьма интересным последствиям. Не останавливаясь на этом подробно (тем более что исследование соответству-

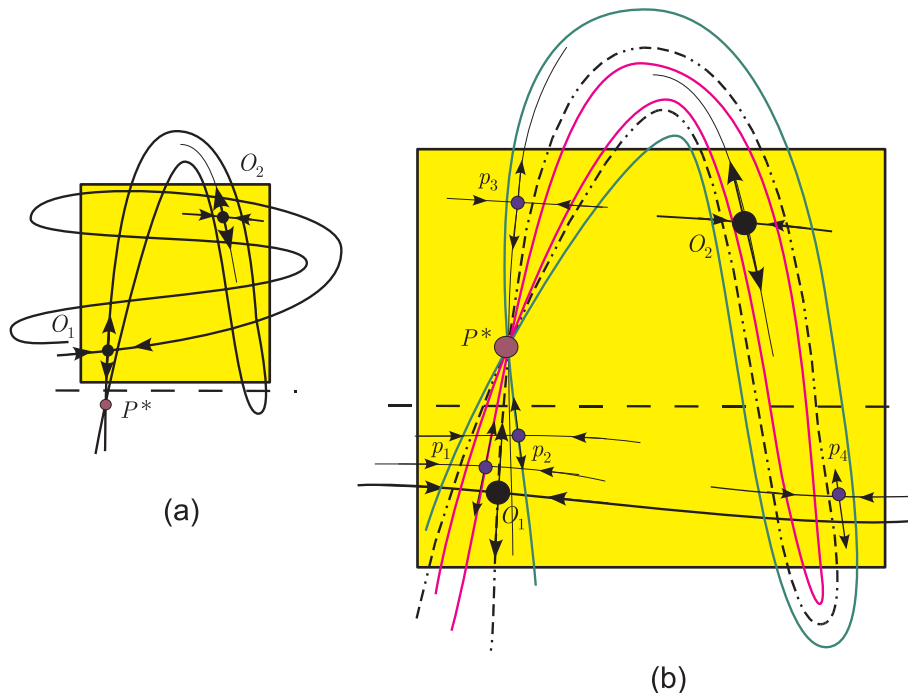


Рис. 17. При  $b > 0$  многообразие  $W^u(O_1)$  образует границу для  $\Lambda$ . (b) При  $b < 0$  «бывшую границу» перекрывают с двух сторон пара (или больше?) связанных кусков некоторой периодической орбиты  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  (на рис. показана такая орбита  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  периода 4). Причем период  $n$  стремится к бесконечности при  $b \rightarrow 0$ , так как  $p_1, p_2 \rightarrow O_1$  при  $b \rightarrow 0$

ющих бифуркационных явлений ещё продолжается), рассмотрим только лишь в общих чертах бифуркацию вблизи  $b = 0$  при  $\alpha < 0$  (случай (h) рисунка 16). Как видно из рис. 16, это бифуркационный момент перехода от полуориентируемой подковы к ориентируемой. Следующий результат из [4] показывает, что при таком переходе могут появляться (полуориентируемые) подковы, имеющие граничные точки сколь угодно больших периодов.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Для фиксированного  $\alpha = \alpha_0 < 0$  рассмотрим интервал  $(-\epsilon, \epsilon)$  значений  $b$ . Тогда на полуинтервале  $(-\epsilon, 0)$  существует счетное множество интервалов  $\delta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  значений  $b$  таких, что при  $b \in \delta_k$  отображение  $\hat{T}(\alpha_0, b)$  имеет полуориентируемую подкову, у которой существует  $u$ -граничная периодическая точка периода  $n_k$ , где  $n_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Формальное (неконструктивное) доказательство этого утверждения — почти очевидно. Действительно, при  $b > 0$  подкова является ориентируемой (рис. 17a), и инвариантное многообразие  $W^u(O_1)$  образует границу для  $\Lambda$  (поскольку в этом случае, в силу утверждения 1, неподвижная точка  $O_1$  является  $(s, u)$ -граничной). При  $b < 0$  точка  $O_1$  уже не может быть  $u$ -граничной, поскольку её устойчивый мультипликатор становится отрицательным. Однако бифуркации, происходящие при  $b = 0$ , приводят к перестройкам в множестве периодических точек так, что некоторые из них становятся  $u$ -граничными — при этом их неустойчивые многообразия «окружают»  $W^u(O_1)$  с двух сторон и становятся граничными (на рис. 17(b) мы иллюстрируем такую ситуацию на примере точек цикла периода 4). Важно, что такая перестройка может произойти только с периодическими точками, орбита которых попадает в достаточно малую окрестность точки  $O_1$ : причем эта окрестность тем меньше, чем ближе точка  $P^*$  к  $O_1$  (и она сжимается

до нуля при  $b \rightarrow -0$ ). Периоды всех таких траекторий (кроме самой точки  $O_1$ ) в любой подковке Смейла стремятся к бесконечности, когда диаметр окрестности стремится к нулю. Это автоматически влечет, что периоды  $u$ -граничных точек стремятся к бесконечности при  $b \rightarrow -0$ .

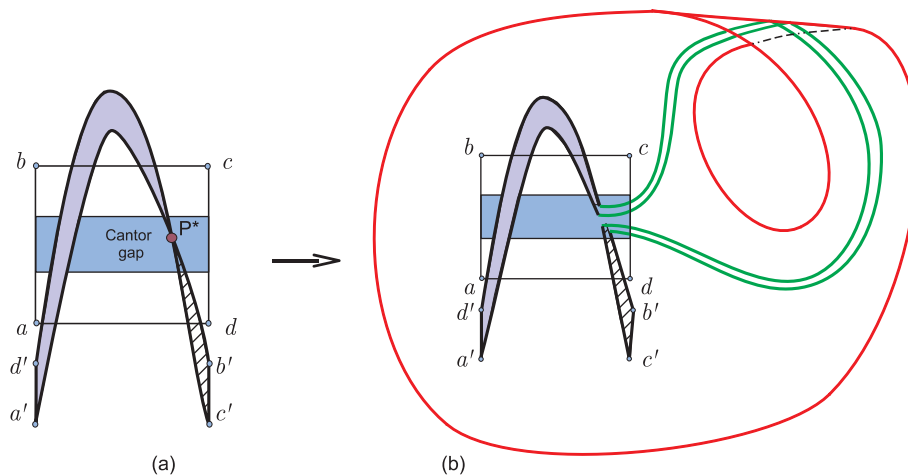


Рис. 18.

Из теоремы 2 вытекает, что в случае эндоморфизмов диска могут существовать (полуориентируемые) подковы Смейла бесконечно многих топологических типов. Однако, используя этот факт, легко установить, что то же самое справедливо и для диффеоморфизмов на неориентируемых двумерных многообразиях. Действительно, с каждой полуориентируемой подковой отображения  $\hat{T}$  можно связать (с помощью «хирургической операции» на блуждающем множестве) одинаковую с ней подкову на многообразии, см. рис. 18, на котором соответствующая конструкция показана для листа Мёбиуса.

**Благодарности.** Авторы благодарят М. Малкина, Ming-Chia Li и Д. Тураева за весьма полезные замечания. Работа поддержана грантами РФФИ No. 07-01-00566 и No. 07-01-00715, грантом МНТИ-РФФИ No. 06-01-72023, а также грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ No. 9686.2006.1.

## Список литературы

- [1] Smale S. A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points, *Труды междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям*, Киев, т. 2, 1963, с. 365–366.
- [2] Аносов Д. В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция, в кн. *Математические события XX века*, М.: ФАЗИС, 2003, с. 1–18.
- [3] *Динамические системы - 9* (ред. Д. В. Аносов), Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 66, М.: ВИНТИ, 1991.
- [4] Gonchenko S., Li M.-C., Malkin M. Generalized Hénon maps and half-orientable Smale horseshoes, Preprint of NCTU No. 2007-5-002, Hsinchu (Taiwan), 2007, submitted to *Int. J. Bifurcation and Chaos*.
- [5] Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах, Часть 1, Часть 2, *Труды ММО*, 1975, т. 32, с. 35–61; 1977, Т. 34, с. 243–252.

- [6] Аносов Д. В., Арансон С. Х., Бронштейн И. У., Гринес В. З. *Гладкие динамические системы*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Динамические системы-1, 1985, т. 1, ВИНТИ.
- [7] Afraimovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, 1982, Pitman, Boston, pp. 336–339.
- [8] Afraimovich V. S. Strange attractors and quaiattractors, *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, ed. by R. Z. Sagdeev, Gordon and Breach, Harwood Academic Publishers, 1984, V.3, pp. 1133–1138.
- [9] Гонченко С. В., Комлев Ю. А. Бифуркации и хаос в кубическом отображении плоскости, в кн. *Методы качественной теории и теории бифуркаций*, Горький, 1988, с. 33–39.
- [10] Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points, *Diff. and Comb. Topology, Princeton Univ. Press*, 1965, pp. 63–80.
- [11] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа, *Матем. сб.*, 1967, т. 74(116), с. 378–397.
- [12] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений, *Докл. АН СССР*, 1965, т. 160, № 3, с. 558–561.
- [13] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности состояния равновесия типа седло-фокус, *Матем. сб.*, 1970, т. 81, с. 92–103.
- [14] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. Часть 1, Часть 2, *Матем. сб.*, 1972, т. 88, № 4, с. 475–492; 1973, т. 90, № 1, с. 139–157.
- [15] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. *Теория бифуркаций*, Итоги науки и техники. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, 1986, Т. 5.
- [16] *Гомоклинические касания*, Сб. статей под ред. С. В. Гонченко и Л. П. Шильникова, Москва–Ижевск, Изд-во «РХД», 2007.
- [17] Devaney R., Nitecki Z. Shift automorphisms in the Hénon mapping, *Comm. Math. Phys.*, 1979, v. 67, pp. 137–146.
- [18] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца, *Труды ММО*, 1982, т. 44, с. 150–212.
- [19] Shilnikov L. P. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial, *Int.J. Bifurcation and Chaos*, 1997, v. 6, № 6, pp. 969–989.
- [20] Tedeshini-Lalli L., Yorke J. A. How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? *Comm. Math. Phys.*, 1986, v. 106, pp. 635–657.
- [21] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре, *Докл. Акад. наук*, 1993, т. 330, № 2, с. 144–147.
- [22] Li M.-C., Malkin M. Bounded nonwandering sets for polinomial mappings, *J. Dyn. and Control Sys.*, 2004, v. 10, pp. 377–389.
- [23] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S. On Andronov-Hopf bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies, WIAS-preprint No. 556, Berlin, 2000.
- [24] Гонченко С. В., Гонченко В. С. О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями, *Труды МИАН*, 2004, т. 244, с. 87–114.